Les Francs Bourgeois - La Salle
Frères des Écoles Chrétiennes

| DST de : | MATHEMATIQUES EXPERTES | | |
|---|---|---|---|
| Date du DST : | Mardi 25 mars 2025 | Durée de l'épreuve : | 1h30 heure |
| Nom du professeur : | Mme FAHLAOUI | Groupe : | TOPTMATEX2 |
| Matériel autorisé : | • L'usage de la calculatrice est interdite pour cette épreuve. | | |
| Consignes particulières : | • Mettre la copie dans la pochette en entourant les bonnes réponses du QCM et ne pas rendre le sujet.<br>• Soigner la rédaction. | | |

**Exercice 1**

*Vous devez répondre aux 10 questions.*

*Une seule réponse exacte par question.*

*Sur la pochette jointe (**annexe pages 2 et 3**), pour chaque question, entourez la bonne réponse.*

*Aucune justification n'est demandée.*

*Afin d'éliminer les stratégies de réponses au hasard, une bonne réponse rapporte 0,5 point, une mauvaise réponse enlève 0,25 point, une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point.*

**Exercice 2**
On donne les matrices $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

**Partie A**

1. Déterminer la matrice $M^2$. On donne $M^3 = \begin{pmatrix} 20 & 10 & 11 \\ 12 & 2 & 9 \\ 42 & 20 & 21 \end{pmatrix}$.
2. Vérifier que $M^3 = M^2 + 8M + 6I$.
3. En déduire que $M$ est inversible et que $M^{-1} = \dfrac{1}{6}\left(M^2 - M - 8I\right)$.

**Partie B Étude d'un cas particulier**

On cherche à déterminer trois nombres entiers $a$, $b$ et $c$ tels que la parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$ passe par les points A$(1\,;\,1)$, B$(-1\,;\,-1)$ et C$(2\,;\,5)$.

1. Démontrer que le problème revient à chercher trois entiers $a$, $b$ et $c$ tels que

$$M \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

2. Calculer les nombres $a$, $b$ et $c$ et vérifier que ces nombres sont des entiers.

**Partie C Retour au cas général**

Les nombres $a$, $b$, $c$, $p$, $q$, $r$ sont des entiers.
Dans un repère $(O;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\,)$, on considère les points A$(1\,;\,p)$, B$(-1\,;\,q)$ et C$(2\,;\,r)$.
On cherche des valeurs de $p$, $q$ et $r$ pour qu'il existe une parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$ passant par A, B et C.

1. Démontrer que si $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = M^{-1} \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}$ avec $a$, $b$ et $c$ entiers, alors

$$\begin{cases} -3p + q + 2r & \equiv & 0\,[6] \\ 3p - 3q & \equiv & 0\,[6] \\ 6p + 2q - 2r & \equiv & 0\,[6] \end{cases}$$

2. En déduire que $\begin{cases} q - r & \equiv & 0\,[3] \\ p - q & \equiv & 0\,[2] \end{cases}$.

3. Réciproquement, on admet que si $\begin{cases} q - r & \equiv & 0\,[3] \\ p - q & \equiv & 0\,[2] \\ \text{A, B, C ne sont pas alignés} \end{cases}$

   alors il existe trois entiers $a$, $b$ et $c$ tels que la parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$ passe par les points A, B et C.
   (a) Montrer que les points A, B et C sont alignés si et seulement si $2r + q - 3p = 0$.
   (b) On choisit $p = 7$.